

Exemplo 1. Determine se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5}$$

Resolução:

1.1 Verificação da condição necessária para a convergência da série

- Trata-se de uma série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad \text{com} \quad a_n > 0$$

- Verificação da condição necessária para a convergência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

EXEMPLOS SOBRE SÉRIES NUMÉRICAS

AM I – MIEM/MIEIG, Carlos AC António

Vem sucessivamente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^4} + \frac{2}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{2n}{n^4} + \frac{5}{n^4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4} \right)} = \frac{0}{1} = 0$$

logo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5} = 0$$

Conclusão: a condição necessária para a convergência é verificada

EXEMPLOS SOBRE SÉRIES NUMÉRICAS

AM I – MIEM/MIEIG, Carlos AC António

1.2 Análise da convergência da série

1.2.1 Estabelecimento de uma hipótese: convergência ou divergência

Considerem-se as sucessões de termos positivos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ com:

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

As duas sucessões têm termos assintoticamente iguais pois verifica-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + 2n + 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^4}{n^4} + \frac{2n^2}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{2n}{n^4} + \frac{5}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = 1 \end{aligned}$$

EXEMPLOS SOBRE SÉRIES NUMÉRICAS

AM I – MIEM/MIEIG, Carlos AC António

1.2.1

Estabelecimento de uma hipótese: convergência ou divergência

sendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

logo :

$$a_n \sim b_n \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$a_n \sim b_n$: leia-se,
 a_n é assintoticamente
igual a b_n

- **Conclusão:** as duas sucessões comportam-se da mesma forma para elevados valores de n .
- Considere-se agora a sucessão de somas gerada por $\{b_n\}$, isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \begin{cases} \text{converge se } p > 1 \\ \text{diverge se } p \leq 1 \end{cases}$$

Série - p (função zeta de Riemann)



Hipótese: Convergência da série em análise

1.2.2 Análise da convergência pelos critérios da comparação

TEOREMA: Duas séries com termos assintoticamente iguais ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.

Conclusão: a convergência da série de comparação,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

implica a convergência da série em análise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5}$$

1.2.3 Análise da convergência pelo critério da comparação por passagem ao limite

- Tomando como série de comparação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{convergente}$$

- Pelo critério da comparação por passagem ao limite verifica-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + 2n + 5} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}\right)} = 1$$

- Assim, a convergência da série de comparação implica a convergência da série em análise.

A série em análise, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 + 2n + 5}$ é convergente.

Exemplo 2. Analise quanto à convergência absoluta, convergência simples (ou condicional) ou divergência a série alternada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

Resolução:

2.1 Análise da existência de convergência absoluta

Supondo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

considere-se a série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} a_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

2.1.1 Verificação da condição necessária para a convergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Calculando, vem sucessivamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} \quad (\text{pela regra de l'Hopital})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Conclusão: a condição necessária para a convergência é verificada

2.1.2 Análise da convergência

2.1.2.1 Estabelecimento de uma hipótese: convergência ou divergência

- Sabendo que:

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \text{ válida para } \forall n \geq 3$$

- Sendo $\{b_n\}$ com $b_n = \frac{1}{n}$, a sucessão geradora da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{Série harmónica, divergente}$$

Então:

Hipótese: Divergência da série dos módulos

2.1.2 Análise da convergência

2.1.2.2 Análise da convergência pelo critério da comparação

- Sabendo que:

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \text{ válida para } \forall n \geq 3$$

- Sendo $\{b_n\}$ com $b_n = \frac{1}{n}$, a sucessão geradora da série de comparação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

← Série harmónica, divergente

Então:

Pelo critério da comparação, a divergência da série de comparação implica a divergência da série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Primeira conclusão:

Não existe convergência absoluta da série em análise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

2.2 Análise da existência de convergência simples (ou condicional)

2.2.1 Análise da convergência pelo critério de Leibniz para séries alternadas

Considere-se a série alternada original:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

- Sabendo que $\{a_n\}$ é uma sucessão monótona decrescente:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\ln n}{n} \right) = \frac{1 - \ln n}{n^2} \leq 0, \text{ válida para } \forall n \geq 3$$

(Pelo critério da primeira derivada)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0, \\ \text{válida para } \forall x \in \mathbf{R} \wedge x \geq e$$

Aproximação válida porque $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$

- Sendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (\text{pela regra de l'Hopital})$$

Segunda conclusão: A série alternada em análise goza de convergência simples.